Задание

1. С помощью скобок Пуассона на фазовой плоскости (p, q) найдите уравнение движения для величины $x = q - t \cdot p/m$. Какой физический смысл имеет этот интеграл движения?

2. Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — вращения координат и импульса вокруг оси z на угол ϵ.

3. Покажите, что в потенциале притяжения вида $U \sim -1/r^2$ частица падает на центр. При каком условии?

4. Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус.

5. Докажите, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

6. Докажите, что квадраты периодов обращения планет T соотносятся как кубы больших полуосей орбит a:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

7. В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца (указание: гравитационное ускорение не зависит от массы). Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, т.е. с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\phi = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}.$$

8. На евклидовой плоскости найдите базис $\mathfrak{h}^{1,2}$ ковариантного пространства, выразив его через базис векторного пространства, который задан в виде

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_x, \qquad \mathfrak{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathfrak{e}_x + \frac{1}{2}\,\mathfrak{e}_y.$$

Запишите метрику в заданном базисе векторного пространства. Используйте метод определения ковариантного базиса соотношениями ортонормировки и метод градиента к линии постоянной координаты.

9. Найдите векторы Киллинга для евклидовой метрики трехмерного пространства в декартовых координатах.

10. Вычислите символы Кристоффеля для евклидовой метрики в сферических координатах.

11. Найти закон преобразования метрической связности при замене координат.

12. Докажите тождество для ковариантной дивергенции вектора

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\alpha \left\{\sqrt{g}\,A^\alpha\right\}$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, т.е. детерминант метрики, для которого $\delta g = g\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$.

13. С помощью задачи 12 докажите, что квадрат оператора ∇ сводится к оператору Бельтрами–Лапласа:

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\alpha \left\{g^{\alpha\beta}\sqrt{g}\,\partial_\beta\right\},$$

по крайней мере, при действии на скаляр.

14. Вычислите оператор Лапласа в сферических координатах из выражения для оператора Бельтрами.

15. В ортогональной системе координат метрика имеет диагональный вид $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(H_1^2,\, H_2^2,\, H_3^2)$, где H_k называют коэффициентами Ламе. Запишите оператор Бельтрами–Лапласа через коэффициенты Ламе.

16. Докажите, что свертка симметричного тензора $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ с антисимметричным $t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}$ тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

17. Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z.

18. Вычислите все компоненты символа Кронекера в базисе $\{+, -, 0\}$.
Ответ: ненулевые компоненты $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$.

19. Вычислите нормировочный коэффициент сферической гармоники

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l}}\, \frac{1}{l!}\, (n_+)^l$$

(методом интегрирования по частям и рекуррентных соотношений).

20. Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче $SO(3):\ 5 \otimes 3$.