

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Государственный научный центр Российской Федерации - Институт физики высоких энергий»  
Национального Исследовательского Центра «Курчатовский институт»  
(ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт»)

29 сентября 2015 г.

Заседание Диссертационного совета  
Д 201.004.01 при Институте физики  
высоких энергий (Протвино)  
Протокол № 5-2015\_2

**Стенограмма заседания диссертационного совета Д 201.004.01**

Защита диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук Сапоновым Павлом Алексеевичем на тему: «Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей».

Специальность 01.04.02 --- теоретическая физика

Протвино 2015

**Председательствующий:** председатель диссертационного совета Д 201.004.01 д.ф.-м.н., профессор, Тюрин Николай Евгеньевич

**Секретарь:** ученый секретарь диссертационного совета Д 201.004.01 к.ф.-м.н., Рябов Юрий Григорьевич.

Всего членов совета: 22 человека.

**Присутствует: 20 человек.**

На заседании присутствовали следующие члены Диссертационного совета Д 201.004.01:

1. Тюрин Н.Е., доктор ф.-м.н., 01.04.02, председатель
2. Зайцев А.М., доктор ф.-м.н., 01.04.23, заместитель председателя
3. Рябов Ю.Г., кандидат ф.-м.н., 01.04.23, ученый секретарь
4. Арбузов Б.А., доктор ф.-м.н., 01.04.02
5. Балакин В.Е., доктор ф.-м.н., 01.04.20
6. Герштейн С.С., доктор ф.-м.н., 01.04.02
7. Зайцев Ю.М., доктор ф.-м.н., 01.04.23
8. Иванов С.В., доктор ф.-м.н., 01.04.20
9. Мочалов В.В., доктор ф.-м.н., 01.04.23
10. Качанов В.А., доктор ф.-м.н., 01.04.23
11. Образцов В.Ф., доктор ф.-м.н., 01.04.23
12. Петров В.А., доктор ф.-м.н., 01.04.02
13. Петрухин А.А., доктор ф.-м.н., 01.04.23
14. Пронько Г.П., доктор ф.-м.н., 01.04.02
15. Саврин В.И., доктор ф.-м.н., 01.04.02
16. Селезнев В.С., доктор ф.-м.н., 01.04.20
17. Сенько В.А., доктор ф.-м.н., 01.04.20
18. Трошин С.М., доктор ф.-м.н., 01.04.02
19. Фещенко А.В. доктор ф.-м.н. 01.04.20
20. Чесноков Ю.А., доктор ф.-м.н., 01.04.20

Диссертационный совет Д 201.004.01 утвержден приказом по Федеральной службе по надзору в сфере образования и науки №105/нк от "11" апреля 2012 г. в составе 22 человек.

На заседании присутствуют 20 членов диссертационного совета из 22, из них 7 докторов наук по специальности 01.04.02 --- теоретическая физика. Кворум имеется. На заседании также присутствуют официальные оппоненты Славнов Никита Андреевич, доктор физико-математических наук, Силаев Петр Константинович, доктор физико-математических наук, профессор. Официальный оппонент Пакуляк Станислав Здиславович, доктор физико-математических наук отсутствует по уважительной причине.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Переходим к нашему главному вопросу --- защите докторской диссертации Павлом Алексеевичем Сапоновым по специальности «Теоретическая физика» на тему «Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей».

**Ученый секретарь Диссертационного совета Ю.Г. Рябов:** Сапонов Павел Алексеевич, 1964 года рождения. В 1987 году окончил физический факультет

МГУ и поступил в аспирантуру нашего института. С 1990 года работает в отделе теоретической физики ИФВЭ. Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук защитил в 1997 году в нашем диссертационном совете. Данная докторская диссертация выполнена в отделе теоретической физики нашего института, научный консультант --- Разумов Александр Витальевич, сотрудник отдела теоретической физики ИФВЭ. Диссертация Сапонова принята к защите 19-го июня 2015 года, диссертационный совет утвердил официальными оппонентами Славнова Никиту Андреевича, гражданина Российской Федерации, доктора физико-математических наук, ведущего научного сотрудника математического института имени Стеклова, Пакуляка Станислава Здиславовича, гражданина Российской Федерации, доктора физико-математических наук, ведущего научного сотрудника ЛТФ ОИЯИ, Силаева Петра Константиновича, гражданина Российской Федерации, доктора физико-математических наук, профессора кафедры квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета МГУ. Ведущая организация --- Институт теоретической физики имени Ландау, Российской Академии Наук. Официальный оппонент Пакуляк Станислав Здиславович отсутствует по уважительной причине, его положительный отзыв представлен в диссертационном совете. У соискателя 36 опубликованных работ, в том числе по теме диссертации 21 работа. Все они опубликованы в рецензируемых научных изданиях. На защиту вынесены результаты, полученные лично автором, либо в соавторстве с его решающим участием. В деле имеются все документы, документы соответствуют требованиям ВАК.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Есть ли вопросы к Юрию Григорьевичу? Нет вопросов? Тогда, Павел Алексеевич, пожалуйста, Вам слово.

**П.А. Сапонов:** Дорогие коллеги, я хочу представить вашему вниманию плод моей научной работы в течение последних примерно десяти лет. Диссертация называется «Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей». Вначале я скажу несколько слов о предыстории и месте этой деятельности в науке, а потом проиллюстрирую свои результаты на некоторых простых примерах. Дело в том, что идейно это все легко понять, но если вдаваться в технические детали, то будет очень сложно выделить главное. Поэтому я ограничусь только самыми простыми примерами.

Прежде всего, хочу пояснить слова «квантовые симметрии» в названии диссертации. Как известно, одной из характерных черт физики 20-го века стало прочное обоснование в математическом арсенале физики понятия симметрии и связанного с ним аппарата теории групп, алгебр, представлений и так далее. В 19-м веке слова «группа», «алгебра» были экзотикой в физике, но после открытия в 1918 году теоремы Эмми Нетер о связи симметрий с интегралами движения идея об отыскании симметрий в системе стала быстро завоевывать популярность. Потом начала развиваться квантовая теория --- квантовая механика и теория поля, и в электродинамике, например, возникли новые абелевы калибровочные симметрии, затем при объединении электромагнитных взаимодействий со слабыми появились неабелевы калибровочные симметрии. Эти симметрии уже играют важнейшую роль в структуре теории: они приводят к тождествам Уорда в электродинамике и тождествам Славнова-Тейлора в неабелевой калибровочной теории, что обеспечивает перенормируемость этих теорий поля. Кроме того, симметрии стали применять для того, чтобы ограничить класс возможных физических моделей.

Практически одновременно с бурным развитием неабелевых калибровочных теорий, примерно в середине семидесятых годов прошлого века, был открыт принципиально новый класс симметрий, которые получили название суперсимметрий. Это симметрии, которые перемешивают бозонные и фермионные состояния теории. С такими симметриями был связан новый математический аппарат супералгебр и супергрупп Ли. Затем были открыты новые еще более фундаментальные модели суперструн, супермембран и так далее. В настоящий момент с этими моделями связываются надежды построения единой теории всех взаимодействий, включая гравитацию.

И, наконец, относительно недавно, в рамках интегрируемых моделей статистической физики, теории поля и теории струн был открыт еще один новый класс симметрий --- так называемые квантовые симметрии. Если говорить грубо, то это дальнейшее обобщение обычных групп и алгебр Ли, зависящее от одного или нескольких параметров деформации. Деформация приводит к усложнению их структуры, но когда параметры деформации устремляются к определенному пределу (обычно единице), квантовые группы и алгебры превращаются в обычные алгебры и группы Ли. Важность этих квантовых симметрий заключалась в том, что именно они, а не обычные группы, являются симметриями интегрируемых моделей --- спиновых цепочек, моделей статистической физики и так далее. То есть, гамильтониан интегрируемой системы оказывается инвариантным относительно действия этих модифицированных квантовых групп. Более того, наличие этих квантовых симметрий приводит к полной интегрируемости моделей: они обеспечивают наличие бесконечного числа интегралов движения и характеристики модели могут, в принципе, быть найдены точно, без использования теории возмущений и других приближенных методов.

В связи с большой важностью этих новых алгебраических структур возникла необходимость углубленного изучения их математических свойств, чему, собственно, и посвящена диссертация. Основной объект моих интересов так называемая алгебра уравнения отражений. Позвольте кратко пояснить, откуда эта алгебра взялась и почему носит такое название.

Алгебра уравнения отражений появилась из физической модели, которая была предложена в начале восьмидесятых годов Алексеем и Александром Замолодчиковыми. Это простая квантовомеханическая модель частиц на прямой, обладающих внутренней симметрией --- набором дискретных квантовых состояний, условно говоря, цветом. Было обнаружено, что если наложить очень простое условие на двухчастичную  $S$ -матрицу --- амплитуду рассеяния двух частиц в две, то после этого оказывается, что произвольная  $n$ -частичная  $S$ -матрица представляется в виде произведения двухчастичных. Таким образом, в этой модели все процессы рассчитываются точно, достаточно лишь знания двухчастичной  $S$ -матрицы. Упомянутое условие на двухчастичную  $S$ -матрицу носит название уравнения Янга-Бакстера. Затем было сделано естественное обобщение на случай, когда пространство модели ограничивалось полупрямой. Вот на этом слайде я изобразил получившуюся ситуацию: на прямой выбирается точка --- нуль отсчета координаты и она объявляется непроницаемой для частиц. За эту точку частицы не могут зайти. На границе происходит упругое отражение. При этом их внутреннее состояние от удара может измениться: состояние  $i$  превращается в состояние  $j$ . Процедура перехода между внутренними состояниями должна описываться некоторым оператором отражения от границы.

В принципе, этот оператор мы можем выбрать как угодно. Проблема в том, что если оператор отражения выбрать произвольным образом, то замечательное свойство модели Замолодчиковых --- полная интегрируемость --- вообще говоря нарушится. Если мы хотим сохранить интегрируемость, то оператор отражения надо согласовать с двухчастичной  $S$ -матрицей. Правило согласования оказалось очень простым. Представим на нашей диаграмме мировые линии двух частиц, двигающихся к границе с разными скоростями. Для сохранения интегрируемости необходимо, чтобы нарисованные здесь процессы. В первом процессе сначала происходит рассеяние, потом быстрая частица отражается от границы и снова рассеивается на движущейся ей навстречу медленной частице. После этого медленная частица наконец достигает границы и тоже отражается. Вторым процессом описываются эти рассеяния и отражения в другой последовательности. В результате появляется уравнение отражения, связывающее двухчастичную  $S$ -матрицу и оператор отражения от границы. Если оператор отражения удовлетворяет этому уравнению, то свойство интегрируемости модели сохраняется.

Матричные элементы оператора отражений порождают некоторую алгебру --- алгебру уравнения отражений. Перестановочные соотношения на генераторы получаются, если это матричное уравнение расписать в компонентах. Я приведу сейчас самый простой пример этой алгебры и расскажу о первой группе результатов, которые мне удалось получить.

Давайте рассмотрим простейший случай: цвета всего два и матрица генераторов алгебры является матрицей  $2 \times 2$ . Если бы это была обычная классическая матрица, то из элементарной алгебры известно, что она удовлетворяет полиномиальному матричному тождеству Гамильтона-Кэли: возводим матрицу в квадрат, вычитаем ее же, умноженную на след, добавляем единичную матрицу, умноженную на детерминант и получаем тождественный нуль для любой матрицы  $2 \times 2$ . След есть просто сумма диагональных элементов, а детерминант можно переписать в терминах следа и следа матричного квадрата. Квантовая матричная алгебра выглядит следующим образом: матрицу  $R$  надо выбирать в таком виде, как показано на слайде, она удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера и зависит от ненулевого числа  $q$ . Генераторы алгебры --- матричные элементы оператора отражений уже не являются числами, явный вид их перестановочных соотношений приведен на экране. Соотношения достаточно сложные, но когда параметр  $q$  стремится к единице, они превращаются в обычные соотношения коммутативной алгебры:  $ab = ba$  и так далее.

Возникает вопрос: в какой степени квантовая матрица является матрицей? Есть ли у нее тождество Гамильтона-Кэли, след, спектр другие характеристики? Оказывается, что все это есть. Квантовое тождество можно переписать почти в таком же виде, что и в классическом случае, только надо модифицировать коэффициенты --- след и детерминант. В данном простом случае след модифицируется добавлением множителей к диагональным коэффициентам. В диссертации были изучены конечно гораздо более сложные и общие ситуации, обобщающие, в частности, суперсимметричные алгебры. Одним из важных результатов явилось нахождение спектра квантовой матрицы и выражение в терминах спектральных переменных элементов характеристической подалгебры. Про структурную теорию квантовых матричных алгебр можно говорить еще долго, в частности о конструкции квантовых симметрических функций и

билинейных тождествах на них, но я перейду ко второму блоку результатов, который касается теории представлений.

То есть, можно ли данные абстрактные правила перемножения квантовых генераторов реализовать внутри какой-то конкретной матричной алгебры? Я остановлюсь только на наиболее сложной и яркой особенности теории представлений квантовых матричных алгебр, которая касается правила перемножения представлений. Обычно в физике здесь никакой проблемы не наблюдается. Например, в квантовой теории углового момента пространство состояний системы, составленной из двух спинов, представляется тензорным произведением пространств состояний ее частей. Оператор спина в этом тензорном произведении строится очень просто: это сумма двух слагаемых, представленных на слайде, первое из которых нетривиально действует в тензорном сомножителе, отвечающем пространству состояний одной частицы и тождественно действует во втором сомножителе. В другом слагаемом все наоборот. Но, заметьте, что при этом мы используем вроде бы естественное правило: оператор второго спина коммутирует с первым базисным вектором тензорного произведения, как бы не замечает его. Но это правило нарушается уже в суперсимметричных алгебрах: при таком коммутировании надо учитывать четность генератора и вектора, через который генератор протаскивается. Появляется знаковый фактор. В квантовой матричной алгебре ситуация еще усложняется. При протаскивании оператора через вектор и оператор и вектор заменяются на некоторые линейные комбинации других операторов и векторов. Нахождение этого правила протаскивания оператора через вектора было одной из самых сложных задач теории представлений, которую удалось полностью решить. В результате, теория представлений была построена и были рассчитаны спектры центральных элементов в неприводимых представлениях.

Дальнейшие результаты относятся к некоммутативной геометрии и ориентированы главным образом на математиков, хотя могут быть интересны и для специалистов в теории струн и гравитации. Суть проблемы состоит в следующем. Генераторы алгебры уравнения отражений можно рассматривать как некоторые некоммутативные координаты и строить из них квантовые функции. И возникает вопрос: можно ли, имея такие координаты и соответствующие функции, построить аналог обычного дифференциального исчисления: векторные поля, частные производные и так далее, то есть, можно ли на этом некоммутативном пространстве развить аппарат обычной дифференциальной геометрии?

На очередном слайде я привел простейший пример такого исчисления на универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли  $gl(2)$ , которая содержится в классе квантовых матричных алгебр. Здесь вы видите новый параметр  $v$ , который отвечает за некоммутативность алгебры: если его положить равным нулю, все генераторы станут коммутативными и мы придем к классическому случаю. Генератор  $t$  централен, то есть, коммутирует со всеми остальными координатами, а генераторы  $x$ ,  $y$  и  $z$  образуют алгебру группы вращений. Можно ли определить частную производную по генератору  $x$ , например и как ее трактовать? Оказывается, это можно сделать, соответствующая алгебра представлена на слайде. Если  $v$  не равно нулю, в перестановочные соотношения производных координат и времени входят некоторые добавки. В частности, производная по времени зацепляется за пространственные координаты. Такое дифференциальное исчисление было построено для общего случая. В качестве

приложения я решил посмотреть на решения уравнения Шредингера в некоммутативном пространстве. Естественно начать с простейшей модели --- атома водорода. Введем аналог радиальной переменной, она оказывается почти такой же, как в классике, с небольшой числовой добавкой. Оператор Лапласа тоже строится как в классическом анализе, только частные производные теперь не обычные, а квантовые. Радиальное уравнение Шредингера решается методом разделения переменных, расчет сложнее, чем в обычной квантовой механике, потому что получаются трансцендентные уравнения на собственное значение и параметр волновой функции, но эти трансцендентные уравнения имеют регулярные разложения вблизи нулевого значения параметра некоммутативности  $\nu$ , контролирующего некоммутативность пространства. В первом порядке по этому параметру получились следующие результаты. Энергия основного состояния сдвигается вверх, поскольку коэффициент при первой поправке положителен. Что касается параметра  $\sigma$ , то он уменьшается из-за отрицательного коэффициента при первой поправке. А так как по своему смыслу параметр  $\sigma$  представляет собой обратную величину к среднему радиусу орбиты основного состояния, то его уменьшение означает, что атом слегка увеличивается в размерах в случае малой некоммутативности пространства.

Получается вполне работоспособная модель. В ней есть интересные особенности --- появляются новые решения, которых нет в классическом случае. Я пока не знаю, как можно интерпретировать эти решения, это интересная задача на будущее. Помимо атома водорода можно решить уравнение Клейна-Гордона и найти аналоги плоских волн в некоммутативном пространстве. Эти модельные примеры служат своего рода тестом для развитого математического аппарата, призванного показать, что весь этот некоммутативный анализ где-то работает.

На этом я закончу краткий обзор основных результатов моей диссертации. Все это изложено в основном в 14 работах, опубликованных в рецензируемых журналах. Спасибо за внимание!

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Кто хочет задать вопрос? Так, Георгий Павлович, у Вас есть вопросы? Нет вопросов?

**Ю.А.Чесноков:** Разрешите формальный вопрос. Юрий Григорьевич, представляя диссертацию, сказал о двадцати трех публикациях по теме диссертации, Вы же говорите о четырнадцати.

**П.А. Сапонов:** Тут дело в следующем. Выбирая работы для защиты, я взял только основные, где опубликованы наиболее существенные результаты. В остальных работах находятся некоторые вспомогательные результаты и при необходимости в диссертации есть ссылки на эти работы. Главное то, что по этим четырнадцати работам можно разобраться во всех результатах, представленных на защиту.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Юрий Андреевич, Вы удовлетворены ответом?

**Ю.А.Чесноков:** Да, я удовлетворен ответом.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Тогда давайте перейдем к выступлению научного консультанта.

**Научный консультант главный научный сотрудник ОТФ ИФВЭ А.В. Разумов:** Я подготовил отзыв, где вкратце описал полученные в диссертации результаты. Я думаю, зачитывать это не стоит, я лучше скажу несколько слов о смысле того, что сделано. На первый взгляд эти игры с некоммутативными вещами кажутся достаточно абстрактными, но, с другой точки зрения, они очень важны. Какая в настоящий момент основная проблема в теоретической физике? Основная проблема в том, что до сих пор не создана квантовая теория гравитации. Мы умеем описывать физический мир на очень малых масштабах с помощью квантовой теории поля и умеем описывать физический мир на больших масштабах с помощью общей теории относительности. Другого варианта у нас сейчас фактически нет. Как-то состыковать эти вещи достаточно сложно, пока не получается. Есть возможность использовать для этой цели теорию суперструн. Но описание квантовой гравитации с точки зрения теории суперструн не всех удовлетворяет. Суперструны действительно дают последовательное описание частиц со спином 2 --- гравитонов. Но когда рассматривается модель супергравитации, то суперструны всегда помещаются в некоторое фоновое гравитационное поле и откуда это фоновое поле возникает в теории суперструн фактически не известно. Тут возникают различные варианты как идти дальше. Один из вариантов --- привлечение некоммутативной геометрии. Предварительные указания на то, что мы должны использовать эти идеи в физических моделях, возникают уже в суперсимметричных теориях, когда пространство стало описываться коммутирующими и некоммутирующими координатами. Идея простая и идет из физики. При построении физической модели мы строим некоторое пространство состояний и рассматриваем на нем функции, которые являются наблюдаемыми. В квантовой механике ситуация немного меняется: состояниям соответствуют вектора гильбертова пространства, а наблюдаемые представляются операторами на нем. Но на самом деле с точки зрения математики существует некий дуализм между этими понятиями: можно рассматривать пространство как таковое, оно состоит из точек, а можно рассматривать функции на этом пространстве. Эти функции можно разбить на некоторые классы, например, мы можем рассмотреть функции, обращающиеся в нуль в некоторой точке пространства. И эти классы отождествляются с точками. Таким образом, можно рассматривать либо пространства, либо функции на нем. В обычном случае функции образуют коммутативную алгебру, но можно придумать некоторую некоммутативную алгебру и работать с ней. Точками будут подалгебры этой алгебры (с некоторыми дополнительными условиями). То есть мы не знаем, какое у нас некоммутативное пространство, но мы знаем, какие функции на нем. И на этом пути в настоящее время делаются попытки построить непротиворечивую квантовую диссертацию. Так вот то, что было во второй части диссертации это в каком-то смысле шаг к построению моделей такого типа. Вот такое общее замечание о смысле проделанного в диссертации.

В заключение можно сказать, что диссертация Сапонова Павла Алексеевича отвечает всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Спасибо, а теперь переходим к оглашению заключения организации, где была выполнена работа и отзыва ведущей организации --- Института теоретической физики из Черногловки.

**Ученый секретарь Диссертационного совета Ю.Г.Рябов:** Заключение организации, в которой была выполнена работа, было принято на заседании научного семинара отдела теоретической физики нашего института, на семинаре присутствовало пятнадцать человек, среди них шесть докторов физико-математических наук и девять кандидатов физико-математических наук. Все проголосовали единогласно за принятие заключения. В заключении дана характеристика результатов Павла Алексеевича, я не буду это повторять. Далее сказано: результаты, предъявленные к защите, представлены в диссертации в полном объеме, тематика работы полностью соответствует специальности «Теоретическая физика». Диссертация «Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей» Сапонова Павла Алексеевича рекомендуется к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 --- Теоретическая физика. И приводится список публикаций, содержащих основные результаты работы.

Ведущая организация --- Институт теоретической физики им. Ландау, дала также положительное заключение по диссертации Павла Алексеевича (зачитывается отзыв ведущей организации, имеется в диссертационном деле).

**Председатель Диссертационного совета Н.Е. Тюрин:** Так, спасибо. Вам слово для ответа, Павел Алексеевич.

**П.А. Сапонов:** По поводу ссылок я согласен, стоит добавить во Введение абзац с освещением физических истоков уравнения отражений. Что касается приложений к моделям, которые я не рассматривал, то тут дело в том, что в какой-то момент работы я понял, что надо остановиться и как-то оформить результаты. Приложения очень многогранны и, с другой стороны, продвигаться там не так просто. И если сюда добавить еще и приложения, то это будет совсем объемный и фундаментальный труд. Конечно, наличие приложений этой математики к физике очень важны, но сама проработка теории представлений и теории квантовых многообразий это уже сам по себе очень большой материал и в какой-то момент надо было просто остановиться.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Хорошо, спасибо. Юрий Григорьевич, отзыв отсутствующего оппонента, пожалуйста.

**Ученый секретарь Диссертационного совета Ю.Г.Рябов** зачитывает отзыв официального оппонента Пакуляка Станислава Здиславовича (имеется в диссертационном деле).

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Так, спасибо. На замечания ответьте, пожалуйста, Павел Алексеевич.

**П.А.Сапонов:** Замечания по поводу обозначений безусловно справедливы. Проблема в том, что формулы, где используются эти обозначения, по своей структуре довольно сложны. Вот, например, в билинейные соотношения или в тождества Гамильтона-Кэли входят функции Шура, параметризуемые диаграммами Юнга. Диаграмма Юнга задается набором длин своих строк и в

формуле для билинейных соотношений все эти строки меняются, что надо как-то отразить в обозначениях. В результате приходится навешивать на символ функции Шура множество параметров, что, естественно, утяжеляет обозначения и, в какой-то мере, затрудняет понимание. Я долго пытался упростить обозначения, но пока не достиг, видимо, оптимального соотношения между простотой и информативностью. Постараюсь работать в этом направлении.

По поводу неопределенных объектов --- есть такая проблема. Я просто в самом начале упомянул, что в диссертации имеется техническое Приложение, где можно смотреть все определения и технические свойства, и больше к этому не возвращался. Возможно, если человек пропустил эту фразу или забыл ее, могут возникнуть проблемы с определениями некоторых символов. Возможно, стоит повторять ссылку на Приложение перед важными утверждениями или теоремами.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Хорошо, спасибо. Теперь переходим к выступлению Силаева Петра Константиновича, Московский университет. Пожалуйста, Вам слово.

**П.К.Силаев, физический факультет МГУ:** Я не буду второй или уже даже третий раз рассказывать о содержании диссертации, тем более, что Павел Алексеевич и так великолепно это сделал. Кроме того, очевидно, что диссертация выполнена на высоком научном уровне --- это уже отмечалось в отзывах оппонентов и ведущей организации. Я, пожалуй, остановлюсь на двух аспектах. Первый аспект --- актуальность представленной работы. В общем-то понятно, что стратегическая задача теоретической физики --- выход за рамки теории возмущений. Один из вариантов --- решеточные вычисления. Но, несмотря на все успехи, прогресс здесь ограничен мощностью вычислительной техники и качеством программного обеспечения. Второй вариант --- делать то, что делает Павел Алексеевич, а именно заниматься точно интегрируемыми системами. Поэтому актуальность диссертации не вызывает ни малейших сомнений.

Второй аспект, на котором я хотел бы остановиться, это структура работы. Когда сталкиваешься с докторскими диссертациями, часто бывает так, что отдельные главы связаны друг с другом единой тематикой только, скажем так, в самом широком смысле. Здесь же структура работы совершенно удивительная. Все последующие главы прямо пользуются результатами предыдущих глав. То есть это достаточно широкое исследование по очень важному направлению, которое в определенном смысле является замкнутыми и в значительной степени завершенным. Понятно, что всегда можно расширяться, всегда можно двигаться дальше, но, если пользоваться старыми критериями, должно быть направление, в котором достигнуты существенные результаты. Здесь все это есть.

Теперь замечания. Замечаний два и сразу скажу, что они не существенны для высокой оценки диссертации. Первое замечание относится к обозначениям. Даже понимая сложность формулировок утверждений и не простую проблему выбора обозначений, все же стоит отметить, что они не оптимальны и местами читать текст тяжело. Второе замечание это даже скорее пожелание из раздела что бы можно было бы сделать еще. Мне бы казалось интересной следующая вещь. В диссертации вычисляются конечномерные представления только для случая диаграмм Юнга в виде столбца и строки. Я понимаю, что заказывать

Павлу Алексеевичу общий случай было бы не разумно, но все же, хотелось бы посмотреть на что-нибудь, отличное от этих двух представлений.

И в заключение еще раз подчеркну, что работа безусловно удовлетворяет всем требованиям ВАК, а Павел Алексеевич несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Спасибо, Петр Константинович.

**П.А.Сапонов:** Действительно, расчет спектров в представлении, отвечающих произвольным диаграммам Юнга весьма сложен. Я нашел общий метод вычисления таких спектров и применил его к тем представлениям, которые мне были необходимы для дальнейшего. Случай общей диаграммы технически сложен, и непосредственно для целей диссертации мне он не требовался. Я написал, как этот расчет можно сделать в принципе, но до явных формул довел лишь те случаи, которые потребовались в последующих главах.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Ну хорошо, спасибо. Теперь выступает официальный оппонент Славнов Никита Андреевич, математический институт имени Стеклова.

**Н.А. Славнов, Математический институт им. Стеклова РАН:** Поскольку я здесь, я не буду зачитывать свой отзыв, а кратко остановлюсь на двух моментах.

Первое --- о значимости результатов, полученных в этой диссертации. Как вы уже несколько раз слышали, в диссертации рассматриваются математические проблемы интегрируемых систем. Это, конечно, весьма мощный метод для непертурбативных расчетов, но, при всех своих достоинствах, интегрируемые системы имеют один общий недостаток, который пока не преодолен. Дело в том, что подавляющее большинство моделей рассматриваются в размерности пространства-времени один плюс один, а наш мир все-таки трехмерный. Может быть и больше, но три измерения мы наблюдаем что называется невооруженным глазом. И любой выход за один плюс один измерения, любой шаг в сторону расширения классов моделей, которые можно исследовать методами интегрируемых теорий представляет собой замечательное продвижение. Вот в данной диссертации значительная ее часть посвящена исследованию алгебры уравнения отражений, а как было сказано, алгебра уравнения отражений используется для описания системы с границей. Когда вы имеете систему с границей; то для описания поведения системы вблизи границы вы можете эффективно пользоваться одномерным приближением и применять методы интегрируемых систем к неодномерным физическим моделям. Уже сейчас такой подход используется в теории квазиодномерных кристаллов, в некоторых моделях физики плазмы и так далее. В этом смысле результаты диссертации П.Сапонова еще более расширяют возможности исследования неодномерных интегрируемых систем.

Второе, что хочется отметить, это вопрос приложений. Здесь уже звучали критические замечания в отзыве от ведущей организации, что в диссертации не были рассмотрены приложения к физическим моделям. Я как раз занимаюсь вопросами приложения квантовых алгебр к теоретическим расчетам интегрируемых систем и смею вас заверить, что если бы в диссертацию были

включены приложения, то это был бы материал не на одну, а на несколько диссертаций. Естественно, приложения к физическим системам это достаточно серьезная проблема, которая требует огромных усилий и времени. Результаты, полученные в диссертации Павла Алексеевича, позволяют существенно сэкономить эти усилия и время. Могу сослаться на личный опыт. Несколько лет назад мы с коллегами занимались расчетами в модели, связанной с группой  $gl(3)$ . Если бы мы в то время больше уделяли внимание квантовым симметриям, подобным тем, что рассмотрены в диссертации, то могли бы заменить очень сложные вычисления девяти матричных элементов вычислением только одного из них, а остальные получить преобразованиями симметрии. Поэтому, хотя в диссертации и не рассмотрены приложения, но она имеет большое значение для конкретных расчетов в реальных моделях.

Диссертация написана, с моей точки зрения, очень четко. Я не согласен с критикой обозначений, которая тут неоднократно звучала, возможно, сказывается привычка к подобным вещам. Могу повторить, пожалуй, замечание относительно того, что некоторые доказательства заменены ссылкой на авторские работы. Я не поленился и посмотрел эти доказательства и, конечно, понимаю, что двигало автором, когда он не воспроизводил их в общем тексте. Но, тем не менее, существуют приложения, где эти доказательства на мой взгляд стоило бы привести.

Тем не менее, на ценность результатов данное замечание не влияет и я могу повторить, что диссертация Павла Алексеевича удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям и ее автор заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Спасибо, Никита Андреевич. У Вас есть что-нибудь для ответа, Павел Алексеевич?

**П.А.Сапонов:** В принципе все правильно замечено. Дело в том, что если все скрупулезно писать, то сильно увеличится текст. Доказательства, которые я опустил, занимают, как правило, более десяти страниц. И если пожалеть читателя, который хочет просто осознать основные результаты, то лучше написать для тех, кто хочет подробностей, где их можно посмотреть. Иначе изложение сильно разрастется и уйдет в сторону. Мне показалось, что с точки зрения разумного объема некоторые вещи лучше опустить. Можно, конечно, как предлагает Никита Андреевич, вынести их в Приложения, но, все же, полностью самозамкнутый текст будет слишком большим и есть риск, что основные идейные вещи просто потеряются в технических подробностях.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Хорошо, спасибо. Переходим к общей дискуссии. Кто хотел бы выступить?

**В.А.Петров:** Мне хотелось бы сказать пару слов от имени всего отдела теорфизики. Я не хочу повторять всего, что уже было сказано, но отмечу, что Павел не только занимался своими научными исследованиями, но и всячески старался своих коллег с ними ознакомить. В частности, у всех нас в памяти замечательный курс лекций по некоммутативной геометрии, который он прочел для сотрудников отдела теорфизики. Кроме того, с моей точки зрения, все, что было сказано относительно перспектив этой работы верно, потому что создан инструментарий для исследований, которые мы в настоящее время не можем и

представить, касающиеся квантовой теории поля, статистической физики и так далее. Квалификация и уровень представленных работ, их значение научное безусловно заслуживают присуждения докторской степени.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Так, спасибо, Владимир Алексеевич. Еще кто-нибудь хотел бы выступить? Ясный вопрос, да? Ну, тогда Вам заключительное слово, Павел Алексеевич.

**П.А.Сапонов:** Я думаю, что в заключительном слове я просто выражу благодарность своим коллегам, с которыми работаю уже очень давно и чью поддержку и внимание я все время ощущаю. Без этого, конечно, никакую диссертацию написать невозможно, потому что, во-первых, важен стимул, важно, чтобы люди вокруг тебя работали и подавали пример. Важны, также доброжелательность и внимание к твоей собственной работе, чтобы не казалось, что ты занимаешься какой-то ерундой, которая кроме тебя никому не интересна. И такая атмосфера взаимного уважения и доброжелательности, которая существует в нашем отделе, мне всегда нравилась и всегда помогала в работе. И отдельно я хочу поблагодарить Владимира Алексеевича за то, что он мягко и настойчиво подвигал меня начать и завершить этот труд по написанию диссертации. Так что именно благодаря его настойчивости и терпению я сумел завершить написание диссертации за разумное время.

И, конечно, я хотел бы поблагодарить своих соавторов и друзей, которые здесь не присутствуют. Это Дмитрий Ильич Гуревич и Павел Николаевич Пятов. Мы много лет работали единой командой, нам было интересно и без них я, безусловно, не многого бы достиг.

И, наконец, спасибо и вам, дорогие коллеги, за то, что пришли и выслушали мое выступление. Спасибо вам большое!

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Теперь давайте выберем счетную комиссию. Предложение такое: Василий Васильевич Мочалов, Владимир Алексеевич Петров и Юрий Андреевич Чесноков. Приступаем к голосованию.

Объявляется перерыв для проведения тайного голосования.

**После перерыва.**

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Прошу членов совета и приглашенных гостей занять свои места. Владимир Алексеевич, Вам слово.

**В.А.Петров, председатель счетной комиссии:** Я хочу огласить результаты тайного голосования, зафиксированные в протоколе. Присутствовало на заседании 20 членов диссертационного совета, роздано бюллетеней 20, осталось не розданных 2, в урне оказалось 20 бюллетеней, из них «за» -- 20, «против» нет, недействительных бюллетеней нет.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Предлагаю утвердить результаты голосования.

Диссертационный совет утверждает результаты голосования.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Спасибо, Владимир Алексеевич. Теперь переходим к утверждению проекта заключения о научном значении. Члены совета ознакомились с проектом? Есть ли замечания?

**Ю.А.Чесноков:** Замечание по оформлению документа, в середине текста сбилось выравнивание полей. По содержанию замечаний нет.

**Председатель Диссертационного совета Н.Е.Тюрин:** Оформление поправим. Других замечаний нет? Тогда с учетом поступившего замечания есть предложение принять заключение о научном значении. Прошу членов совета проголосовать. Спасибо. Итак, Павел Алексеевич, поздравляю Вас с успешной защитой.

Заседание Диссертационного совета завершено.

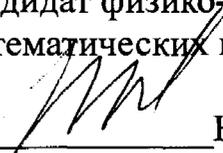
Председатель  
Диссертационного совета  
доктор физико-математических наук,  
профессор



Н.Е.Тюрин



Ученый секретарь  
Диссертационного совета  
кандидат физико-  
математических наук



Ю.Г.Рябов